ДРАГАН ТРИФУНОВИЋ
ДУШАН АДАМОВИЋ

О ЈЕДНОЈ СВЕТОГОРСКОЈ МАТЕМАТИЧКОЈ РАСПРАВИ И ЊЕНОМ ПРЕВОДУ НА НАШ ЈЕЗИК

Димитрије Туцовић (1881—1914), истакнути социјалистички и раднички првак у Србији на почетку 20. века, успео је да у току свог кратког, трагично и херојски окончаног, живота стекне и углед снажног, изразитог интелектуалца, и то у време које је у Србији било обележено необично интензивним и свестраним културним и интелектуалним полетом. Овај реноме **Туцовићу** су оправдано донели његови бројни чланци и други публицистички и слични радови, писани веома луцидно и садржајно, а не мање темпераментно, са жаром енергичног политичког борца.[1] Познато је, међутим, и да је **Д. Туцовић** већ као сасвим млад човек, па и као ученик Ужичке реалке, видно испољавао своје разноврсне умне способности и склоности. Био је, наравно, одличан ђак, али је већ као гимназијалац објављивао озбиљне прилоге у „Радничким новинама" (чији ће главни уредник постати неколико година касније), а живо је деловао и у разним ученичким удружењима и групама, тзв. „дружинама", литерарним и другим, чији је често био покретач и предводник.[2] Син проте **Јеврема Туцовића, Димитрије** је био, тада и касније, страстан и истрајан читалац, који систематским проучавањем одговарајуће литературе упорно настоји да, прелазећи увелико границе обичних школских знања, стекне потпунија и подробнија обавештења о предметима свог дубљег интересовања.

Овде ћемо изложити и анализирати један конкретан случај овакве **Туцовићеве** активности у шестом разреду Ужичке реалке.[3] Прегледајући сва годишта часописа *Наставник*, наишли смо на чла-

---

[1] *Сабрана дела Димитрија Туцовића* у серији *Дела српских социјалиста*, издање „Рада", књ. 1, Београд 1975.

[2] О успеху **Димитрија Туцовића** у гимназији видети рад **Ђорђа Митровића**, *Фрагменти за биографију Димитрија Туцовића*, Димитрије Туцовић и раднички покрет Србије, Титово Ужице 1982, стр. **83—102** и **Н. Поповић**, *Димитрије Туцовић*, Београд 1934.

[3] Школске 1898/99. године **Д. Туцовић** је учио и завршио VI разред *приватне* Ужичке реалке. До оснивања приватне реалке дошло је после затварања Ужичке реалке „због јаких социјалистичких утицаја" (**С. Димитријевић** из напомене под 1).

нак *Нова теорија трансинскриптних сфера.*[4] Реч је о преводу чланка *Nouvelle théorie des spheres transinscrites,* чији је аутор *„Отац* **Кипријан,** *светогорски монах, пређашњи Кнез* **С. Вјаземски,** *истраживач"*, а који је у броју од 15. септембра 1898. године објавио париски научни часопис *Revue générale des sciences pures et appliquées.*[5] У фусноти у вези с насловом текста уредништво *Наставника* дало је следеће обавештење: „Ову новину послао нам је **Дим. Ј. Туцовић,** ученик VI раз. Ужичке Реалке. По препоруци својега наставника математике он је превео овај чланак из *Revue générale des sciences"*.[6]

Овај податак, веома важан за студију живота и дела **Димитрија Туцовића** и значајан за историју математике код нас, сведочи и да је математика, штавише, и поједина ужа питања и теме за које би се могло сматрати да припадају текућој математичкој научној продукцији, била — бар унеколико и бар у једном периоду његовог гимназијског школовања — предмет пажње и интересовања младог **Туцовића.** Заслуга за буђење и такво усмеравање овог његовог интересовања припада, свакако, и његовом тадашњем професору математике.[7]

У сваком случају, из чињенице што је професор математике баш **Туцовићу,** а не неком другом од својих ђака, предложио и поверио превођење овог математичког рада, објављеног у угледном француском часопису, скоро са сигурношћу може се извести закључак да је он имао високо мишљење о озбиљности **Туцовићевог** интересовања за математику и његовим одговарајућим предзнањима, као и да је сматрао сасвим солидним његово познавање француског језика.[8]

---

[4] *Наставник,* лист Професорског друштва, Београд, година 1899, **3—4.** свеска, март и април, књига X, власник Професорско друштво, одговорни уредник проефсор Ранко Петровић.

[5] *Revue générale des sciences pures et appliquées,* **9** (1898), **17,** pp. **665—666.** Захваљујемо поч. **Лазару Трифуновићу** (1929—1983) који нам је из Париза послао фотокопију чланка оца Кипријана.

[6] *Наставник* **10** (1899), стр. **153.**

[7] Нисмо успели прецизно утврдити име професора математике Ужичке реалке који је саветовао младом **Димитрију Туцовићу** да преведе рад оца Кипријана и објави га у *Наставнику.* Према *Шематизмима Србије* за 1895—1899. годину, установили смо да су у Ужичкој реалци математику и нацртну геометрију предавали професори **Јован Дравић** и **Атанасије Савић.** Од ове двојице професора, један је имао жељу да Туцовића „вине у свет математике". За **Туцовићевог** професора математике веома је значајан податак да је при крају прошлог века „у далеком Ужицу" добијао и читао страни часопис *Revue générale des sciences pures et appliquées*!

[8] Према *Шематизмима Србије* за 1895—1899. годину, установили смо да је у Ужичкој реалци француски језик предавао професор **Урош Кубуровић.** Поред француског, млади **Туцовић** је добро познавао и немачки језик. „Под утицајем Радована Драговића, који му је слао литературу, **Д. Туцовић** је савладао немачки језик. У петом разреду гимназије 1897/98. он је већ толико знао немачки да је читао без речника..." (**С. Димитријевић:** наведено под 1).

*
* *

Самом раду оца **Кипријана** претходио је краћи уводни текст уредника француског часописа **Луја Оливјеа** *(Louis Olivier).* У њему је поменута недавна посета Светој Гори, и посебно „руском манастиру Росикону",[9] групе од 350 туриста, чију је екскурзију иначе организовао сам часопис, као и пријатно изненађење ових посетилаца Росикона кад их је тамо дочекао „монах који перфектно говори француски" и који је отпрве деловао као човек високе културе, научник и личност „жедна идеала". Даље се, у овом кратком али срдачно, топло написаном уводу, каже да је то заиста био велики научник, пре монаштва *славни истраживач,* који је сада, као скроман монах, избегавао да ту своју прошлост макар помене; најзад се саопштава да је он, тадашњи отац **Кипријан** а раније кнез **Вјаземски,** извесно време после тога *Ревији* упутио „један занимљив рад из геометрије", који она објављује без измена, „желећи да мисли руског научника остави сву њену особеност, и начину на који је он њу сам изразио, сву његову арому".[10]

Приметимо да сама чињеница овакве туристичке екскурзије баца занимљиву светлост на време — крај 19. века — у коме се догодила: није баш феномен организованог масовног туризма, у свим његовим видовима, искључиво својствен нашем добу, овим последњим деценијама; и скоро пре сто година извођене су туристичке шетње заиста импозантне масовности, и то специјализованог, истраживачког типа, у организацији једног научног часописа, што ни данас није сувише чест догађај! Сама *Revue générale des sciences* била је у то време светски угледан часопис, добрим делом информативно-популаризаторског карактера, али и са прилозима озбиљних научних претензија.

Рад оца **Кипријана** односи се на правилне полиедре и за њих уводи и проучава тзв. трансинскриптне (у **Туцовићевом** преводу „крозуписане", могло би се рећи и „надуписане") сфере, тј. сфере које додирују све ивице тих полиедара. Ово би била трећа врста сфера које се доводе у везу с правилним полиедрима, поред општепознатих уписаних и описаних сфера. Пошто је на једноставан начин установио постојање једне и само једне овакве сфере за сваки правилни полиедар и дао формулу која изражава њен полупречник помоћу полупречника описане сфере и дужине ивице полиедра, аутор наводи низ особина трансинскриптних сфера и чињеница

[9] Руски манастир Росикон (Стари Русик) у Светој Гори саграђен је у 12. веку и налази се на пола часа од обале у унутрашњости копна. „... у њему је дотадањи кнез хумски **Растко**, син **Немањин**, примио ризу и добио име **Сава**". Једно време Стари Русик је био у рукама српских монаха. Манастир је у почетку 14. века изгорео, а затим обновљен. — Сви подаци из књиге **А. Дероко**: *Света Гора,* Београд 1977.

[10] *Revue générale des sciences ...*, наведено, стр. **665.**

у вези с њима, као и још две формуле за полупречник трансинскриптне сфере, напомињући да би се могао навести још велики број других особина „ових занимљивих сфера". Он, међутим, констатује да је већ оно што је изложио довољно за увиђање важне улоге коју те сфере могу одиграти у проучавању правилних полиедара, благодарећи на првом месту већој једноставности наведених формула, веза и својстава од оних у случајевима уписаних и описаних сфера, што трансинскриптне сфере чини погоднијим, нарочито за израчунавање метричких елемената правилних полиедара. Ово своје тврђење отац **Кипријан** образлаже и конкретизује с неколико посебних примера. После напомене да би сфере у питању такође могле играти значајну улогу у испитивању *двојног преламања* и *поларизације светлости*, отац **Кипријан** на крају истиче још једну занимљиву околност: позната чињеница да сваком метричком или дескриптивном својству једног правилног полиедра одговара аналогно својство њему коњугованог полиедра, била би, уколико се не би разматрале и трансинскриптне сфере, него само уписане и описане, нарушена паром *коцка-октаедар:* док је однос дужине ивице коцке и полупречник њене уписане сфере рационалан, са коцком коњугован октаедар (а такође и ниједан други правилан полиедар) нема сличну особину — уколико се не узме у обзир и трансинскриптна сфера. Међутим, управо је ивица октаедра у рационалном односу с полупречником његове трансинскриптне сфере, и тако се, захваљујући овим сферама, уочена правилност, симетрија у свету правилних полиедара савршено заокругљује.

Скоро сва тврђења и формуле оца **Кипријана** дати су без доказа, али директним проверавањем и консултовањем литературе установили смо тачност већине њих, а нема разлога за претпоставку да и остале нису такве.[11] Нема озбиљног разлога ни за сумњу у то да је отац **Кипријан** сасвим самостално, сопственим мисаоним напором, без репродуковања туђих идеја и сазнања, дошао и до појма трансинскриптне сфере и до свих осталих резултата и расуђивања која његов рад садржи. О овоме сведочи и особеност и консеквентност његовог начина размишљања и специфична, лично

[11] У Д. Туцовићевом преводу има неколико штампарских грешака у отиску математичких израза. Тако, у другом изразу на страни 154. треба да стоји

$$\frac{\sqrt{3}(3+\sqrt{5})}{12},$$

као у оригиналном тексту, а одмах затим

$$\frac{\sqrt{5+\sqrt{5}}}{2\sqrt{2}}$$

и

$$\frac{\sqrt{5}+1}{4}.$$

обојена форма његовог излагања и изражавања, што је истакао и уредник *Ревије* горе наведеним речима. У том смислу, садржај овог рада оца **Кипријана** могао би се сматрати оригиналним доприносом. Мора се, међутим, рећи да је не само до појма трансинскриптне сфере (под другим називом „полуописана сфера", у енглеској верзији „med-sphere") него и до скоро читавог његовог садржаја — геометријска наука до времена објављивања овог **Кипријановог** чланка већ била дошла, превазишавши га чак у неким правцима. Наиме, познато је да се правилним полиедрима бавила већ античка грчка математика; тако 13. и 14. књига **Еуклидових** *Елемената* садрже неколико метричких особина ових полиедара, а посебно у 13. књизи описане су конструкције свих њих.[12] Каснији векови донели су знатно проширење и употпуњење знања о правилним полиедрима. То нарочито важи за 18. и 19. век (**Ојлерове** опште теореме[13] и с њима у вези доказ да су Платонова тела, њих пет укупно, једини правилни полиедри). Може се сматрати да су отприлике до пред крај 19. века откривене и све метричке и остале битне особине правилних полиедара у обичном, тродимензионалном простору, и тиме је практично завршено проучавање тих полиедара. У ово треба, наравно, укључити и трансинскриптне сфере и њихове особине. Према специјалисти за ову област геометрије, кога смо консултовали, није познато ко је први дефинисао ове сфере, али већ у уџбенику геометрије холандског аутора **Van Swinder**-а (за своје време изврсној књизи), чији је енглески превод изашао 1834. године, налази се известан број резултата у вези с њима. На том подручју у 19. веку истакла се **Alisa Scott-Boole** (кћи чувеног математичара и логичара **G. Boole-a**). У њеним радовима и у каснијим радовима других геометара тежиште интересовања помера се ка испитивању полиедара и полигона у вишедимензионалним просторима. У том правцу до краја 19. века добијен је низ занимљивих и значајних резултата. Све ово, међутим, не поништава унутрашњу, субјективну — да тако кажемо — оригиналност и аутентичност рада оца **Кипријана** и онога што је у њему добијено. Сем тога, поменута истраживања, вршена у неколико претходних деценија 19. века, у време о коме је реч, још су добрим делом имала уско специјалистички карактер и статус и као таква била су ван видокруга шире научне и математичке јавности. Тако се могло десити да не само математичар-аматер какав је био отац **Кипријан** у најбољем уверењу овај свој рад напише и упути часопису, него и да уредник часописа *Revue générale des sciences* **Луј Оливје** исти рад прихвати и презентира као *Нову теорију трансинскриптних сфера*.

Тек у коментару који отац **Кипријан** прикључује последњем разматрању у овом раду — оном о иначе непотпуној а тек тран-

[12] *Еуклидови Елементи*, Тринаеста књига са додатком такозване четрнаесте и петнаесте књиге, превео и коментар додао **Антон Билимовић**, Српска академија наука, Класични научни списи, књига XIII, Математички институт, књига **13**, Београд, 1957, стр. **85**.

[13] **Leonard Euler**, 1707—1783.

синскриптним сферама до краја успостављеној симетрији у свету правилних полиедара — долази до изражаја **Кипријанова** тадашња „професија", наиме, његова монашка, духовничка опредељеност и усмереност: „Ова једноставна чињеница већ је била побудила радозналост многих геометара, који, не желећи да допусте да од **Творца** потиче нека неправда, поготову према неживим стварима, нису могли да схвате зашто је само коцка у овом повлашћена на рачун свог коњугованог полиедра. Било је то као неки изазов бачен људском духу, та несхватљива неправилност..."[14] Некима ће свакако ова размишљања оца **Кипријана** изгледати наивна, а могло би се поставити и питање њихове исправности и умесности са строго теолошког становишта (разматрање о „правди" и „неправди" према „неживим стварима", које су заправо апстракција, као да пре припада неком религиозном сентиментализму него озбиљном теолошком ставу). Чини нам се, ипак, да има духовите инвенције у овом **Кипријановом** запажању и прикљученој интерпретацији, као и елеганције у начину на који је једно и друго исказано.

*
* *

Туцовићев превод **Кипријановог** француског текста, који овде репродукујемо заједно и паралелно с француским оригиналом, у

Димитрије Туцовић из гимназијских дана; снимљен у Ужицу 1898. године, у време када је преводио математички текст оца Кипријана

[14] *Revue générale des sciences...*, наведено, стр. **666.**

великој мери је коректан и успео.[15] У великој већини случајева **Туцовић** је добро схватио тачан смисао реченице и нашао му одговарајућу, прикладну формулацију на нашем језику. Умесно је што у неким случајевима није настојао да до ње дође непосредном заменом сваке речи нашом речи истог значења, него је (као што се то често у добрим преводима иоле комплекснијих, тежих текстова чини — и мора да чини), одступајући од буквалности, друкчијим речима и комбинацијама речи постизао адекватно преношење суштине смисла — уз вођење рачуна о контексту — у наш језички медијум. У таквим ситуацијама, наравно, често није једнозначно одређено како треба поступити, па преводилац има већу или мању слободу избора, избора у коме могу доћи до изражаја његови афинитети и преференције, особености његовог личног става. Тако, нека **Туцовићева** решења одају његову већ тадашњу опредељеност за „реални правац" (**Светозар Марковић** и следбеници), чији је утицај на омладину, нарочито средњешколску, баш у то време био у јеку: и кад није изричито заступао атеистичке или социјалистичке тезе, правац је веома много инсистирао на агностицизму у односу на „последња питања" и на реализму и социјалном утилитаризму у животу и литератури. Као јасна манифестација овог става, уз одузимање великог почетног слова **Творцу** (Créateur) из **Кипријановог** текста, пада у очи околност да је сам отац **Кипријан** — „un assoiffé d'idéal", дакле, у дословном значењу „човек жедан идеала" (или, можда, нешто другачије али по смислу слично речено, „човек страсно привржен идеалу"), из уводног текста **Луја Оливјеа** у **Туцовићевом** преводу постао само „човек пун идеала": идеале реалан правац свакако прихвата и цени поготову као корисне инструменте друштвеног прогреса, али да идеал као такав буде унутрашња потреба, чак предмет нечије жеђи — то је за младог **Туцовића** (као и за његовог наставника, вероватно) представљало ипак мало претерано романтичарски и идеалистички став — неприхватљив макар и у преводилачкој репродукцији! Приметимо и то да је извесна непотпуност **Туцовићевог** тадашњег владања француским језиком, заједно с недостатком искуства у превођењу оваквих, сложенијих текстова, учинила да његов превод на неколико места не буде адекватан. Тако му се, примера ради, скоро на самом почетку превода, десило да уместо коректног „Није уопште било потребно бити нарочито учен да би се у њему распознао..."[16] — напише „И ако он није био велики свештеник,

---

[15] У наведеној књ. 1 *Сабраних дела Димитрија Туцовића* (Београд, 1975) објављене су *Животописне белешке* (одабрао и редиговао **Сергије Димитријевић**, стр. 589—671) у којима се наводи Туцовићев превод. „Први превод Д. Туцовића (са француског језика) објављен је у време када је он био ученик VI разреда ужичке реалке. То је био чланак **Кипријана** (**С. Вијаземски**), *Нова теорија трансинскриптних сфера*, „Наставник" X, 1899, св. **3** и **4**, март и април, стр. **153—156**". Аутори овог рада су знатно пре ове белешке открили овај Туцовићев превод истражујући нашу математичку прошлост кроз часописе нашег 19. века.

[16] *Revue générale des sciences...*, наведено, стр. 665.

ипак се у њему могао распознати..."[17] У основи ове омашке налази се превиђање чињенице да реч „*clerc*" поред значења „свештеник, свештено лице" има и значење „учен", што је учинило да **Туцовићу** сасвим измакне прави смисао овог места. Нешто даље, млади **Туцовић** је „...voulant laisser à la pensée du savant russe tout son caractère, et à la façon dont il l'a exprimée toute sa saveur"[18] — превео са „...хотећи да остави у мисли руског научника сав његов карактер и метод, којим је изразио пуну научност."[19] У питању је очигледно промашај условљен тиме што се — због почетног дела *sav* — речи *saveur*, која иначе значи *укус* (или, у овом случају, пре *арома*), по аналогији са *savant*, дало значење *научност*. Још неколике некоректности у преводу знатно су мање и мање значајне. Младом **Туцовићу**, наравно, не треба замерити што је извесне непрецизности у математичким формулацијама, које су у оно време биле уобичајене и углавном толерисане (на пример, писање „трансинскриптна сфера" уместо исправног „полупречник трансинскриптне сфере" у формулацијама особина под 1 и 2), преузео од аутора — оца **Кипријана** не коригујући их.

*

* *

На основу уводног *Ревијиног* текста, као и самог **Кипријановог** чланка, сигурно је да се отац **Кипријан** математиком бавио као аматер, тако да математика није била она наука у којој се пре монаштва прославио као *истраживач* (explorateur). Није јасно која је то наука била, али веома је вероватно да нису у питању ни физика или хемија, које је, као што се види, такође познавао, него нека од „теренских" природних наука, као што су географија, геологија, ботаника или зоологија, или можда етнологија, јер француска реч *explorateur* баш означава теренског истраживача, никако само кабинетског или лабораторијског. Нема сумње да он, пре замонашења **кнез Вјаземски**, потиче из високог руског племства, а скоро је сигурно да се у световној фази живота више или мање кретао у круговима тог племства. Биће да је и касније, као светогорски калуђер, сачувао нешто од манира и префињености тог великог света — и то у најбољем значењу речи. Тиме се може објаснити онај шарм личности којим је, уз савршено владање француским језиком и друге своје квалитете, импресионирао групу француских посетилаца Росикона, свакако највећим делом интелектуалаца. Та импресионираност и симпатија још трепере у неколико месеци касније писаном извештају уредника **Л. Оливјеа**. Радозналост читаоца ових текстова, наравно, побуђује разлог његовог напуштања световног живота и каријере, а по свој прилици и главних научних активности, ради монашке смирености и смерности. Лежи ли он, као што то обична, да не кажемо банална, читаочева реакција одмах, аутоматски претпоставља, у неком

[17] *Наставник* **10** (1899), стр. **153**.

[18] *Revue générale des sciences*..., наведено, стр. 665.

[19] *Наставник* **10** (1899), стр. **153**.

ударцу судбине, животној катастрофи, тешком разочарању у некога или у нешто, или је у питању логичан исход постепеног сазревања и продубљивања истинске религиозности кнеза и научника **Вјаземског**? Наша настојања да било од Свете Горе (додуше, само преко неких наших монаха из Хиландара), било од Института за историју АНСССР добијемо било какав податак о оцу **Кипријану**, односно кнезу **Вјаземском** — нису досад дала никакве резултате.[20] Није мало тужна чињеница што се за неког ко је пре мање од 90 година био славно име у светској науци — данас, и то на местима где би првенствено требало да их буде, не могу наћи ни основни докази постојања и идентитета, а камоли неки ближи подаци о животу и постигнућима: Sic transit...! Не прихватајући коначност оваквог закључка, надамо се бар неким плодовима наших даљих покушаја у истом правцу.

И тако, ближи аналитички увид у овај Кипријанов рад, Туцовићев превод тог рада и две пропратне уредничке белешке открива више занимљивих околности. До неких закључака долази се са сигурношћу на основу тих текстова, нешто се са извесном основаношћу може закључити екстраполирањем поузданих чињеница, а много остаје да се само, са више или мање разлога и среће, претпоставља, нагађа. На тај начин, њихово испитивање, без добијених допунских података — засад, дајући извесне резултате, још више делује као подстрек: да се потпуније испита и осветли, у неким димензијама које досад нису биле баш у центру пажње, рана младост **Димитрија Туцовића**, разни аспекти интелектуалног формирања будућег социјалистичког лидера и идеолога; такође, да се сазна више о необично занимљивој, а не мање загонетној, личности и животу кнеза **Вјаземског**, касније оца **Кипријана**; како о његовим научним активностима пре замонашења, о области којој су оне припадале и о карактеру и садржају достигнућа која су га прославила у светској научној јавности, тако и о његовом каснијем светогорском животу, о његовим математичким, евентуално и осталим научним и уопште интелектуалним, духовним — и духовничким — делатностима у то доба, на крају прошлог и почетку нашег века, у времену које умногоме представља судбоносну границу, прелаз између две различите епохе — за свет, па и за Свету Гору! Од посебног интереса било би, наравно, евентуално установљавање извесне везе и сарадње овог руског монаха и интелектуалца с нама, Србима, с нашим Хиландаром.

Тако су се, у *Наставнику* од пре скоро деведесет година и сада, у овом нашем напису, два пута до сада за тренутак укрстили путеви две јединствене личности — руског кнеза, па монаха **Кипријана** и српског социјалисте **Туцовића**, личности којима је, поред свих дубоких међусобних разлика, било заједничко извесно занимање за математику, и наклоност према њој, и које су — на врло различите начине, свакако, али обе истински и суштински — пре свега биле „жедне идеала".

---

[20] Рецимо, писмо Института за историју СССР, АНСССР од 29. јуна 1981. са потписом заменика директора Института др **В. И. Буганова.**

9e ANNÉE N° 17 15 SEPTEMBRE 1898

REVUE GÉNÉRALE

DES SCIENCES

PURES ET APPLIQUÉES

DIRECTEUR : LOUIS OLIVIER

CHRONIQUE ET CORRESPONDANCE

§ 1. — Mathématiques

Nouvelle théorie des sphères transinscrites. — *Quand, il y a quelques mois, la Revue conduisit 350 touristes au couvent russe du Rossicon (Mont-Athos), les voyageurs eurent la très agréable surprise d'y être accueillis par un moine qui parlait parfaitement le français. Point n'était besoin d'être grand clerc pour discerner en lui plus qu'un esprit très cultivé, un assoiffé d'idéal et un savant. Mais le père Cyprien — c'est ainsi qu'on l'appelait — cachait modestement sous cette désignation monastique le nom qu'il a rendu célèbre parmi les explorateurs, et s'abstenait de parler de sa science de prédilection. Aujourd'hui, la Revue reçoit de lui le très curieux travail de Géométrie qu'on va lire. Elle le publie sous la forme même que lui a donnée l'auteur, voulant laisser à la pensée du savant russe tout son caractère, et à la façon dont il l'a exprimée toute sa saveur.* L. O.

J'appelle sphère transinscrite à un polyèdre celle qui est tangente à toutes ses arêtes.

On sait que tout polyèdre régulier possède une sphère inscrite et une sphère circonscrite; outre cela, le tétraèdre possède encore quatre sphères exinscrites (pas davantage, car dans ses combles il n'y en a pas). Aucun autre polyèdre régulier ne saurait en admettre, puisque ses faces opposées sont toujours parallèles; mais, à la place de cela, chaque polyèdre régulier (le tétraèdre y compris) possède une sphère transinscrite, qui *lui est concentrique, touche toutes ses arêtes en leurs milieux et coupe toutes ses faces suivant des cercles qui leur sont inscrits.*

Maintenant, le lecteur peut comprendre pourquoi j'ai donné le nom de « transinscrite » pour ce genre de sphères, puisque, tout en étant inscrites, elles coupent le polyèdre et en sortent par autant de calottes sphériques que le polyèdre a de faces.

Il est facile de démontrer l'existence de pareilles sphères. En effet, soit un polyèdre P de nature quelconque, f sa face et a son arête; R le rayon de la sphère qui lui est circonscrite. Le triangle qui a son sommet au centre et pour base l'arête, est isocèle, car ses deux côtés sont les rayons; par suite, la perpendiculaire abaissée du centre sur l'arête tombe en son milieu et est égale à la racine carrée de la différence entre le carré du rayon et celui de la moitié de l'arête, c'est-à-dire

$$\sqrt{R^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2};$$

elle est donc constante; la sphère qui l'aura pour rayon, et de plus, aura son centre au centre du polyèdre, sera, par conséquent, tangente à toutes les arêtes du polyèdre en leurs milieux, et elle sera unique de ce genre, c'est-à-dire indépendante de la nature du polyèdre et même de son espèce, car ceux d'espèce supérieure possédant tous un noyau convexe, on pourra raisonner sur ce noyau comme on l'a fait sur le polyèdre ordinaire.

Or, l'espèce d'un polyèdre étant subordonnée à sa nature, on voit que les polyèdres d'espèce supérieure auront les mêmes sphères transinscrites que ceux dont ils dérivent d'après le système de Cauchy.

Les sphères transinscrites ont des propriétés remarquables, mais on appréciera surtout l'importance de ces nouvelles sphères en remarquant que *tandis que les rayons des sphères inscrite et circonscrite ne s'expriment en fonction de l'arête du polyèdre que d'une façon très compliquée, le rayon de la sphère transinscrite s'exprime très simplement en fonction de cette arête.* Par exemple, d'après Cauchy, en prenant l'arête de l'icosaèdre pour unité, le rayon de la sphère qui lui est inscrite est égal à

$$\frac{\sqrt{3}\,(3+\sqrt{5})}{12}$$

et celui de la sphère circonscrite à

$$\frac{\sqrt{5+\sqrt{5}}}{2\sqrt{2}}.$$

Dans les mêmes conditions, le rayon de la sphère transinscrite est égal à

$$\frac{\sqrt{5}+1}{4};$$

on voit combien cette expression est plus simple que les précédentes : elle ne contient qu'un seul radical et qui se calcule fort aisément; le même cas se présente concernant les autres polyèdres. Si nous désignons par I l'inclinaison de deux faces adjacentes, et par ρ le rayon de la sphère transinscrite, nous pourrons déduire facilement la formule générale qui servira pour le calcul de la surface et du volume de cette sphère lorsque l'arête du polyèdre est donnée et *vice versa* quand c'est le rayon de la sphère qui est connu. A cet effet, désignons par k le quotient de la demi-circonférence, par π le nombre qui exprime combien les faces du polyèdre en question ont de côtés et par L le quotient de la même quantité par le nombre exprimant combien il y a d'arêtes qui aboutissent à chaque sommet. (De sorte que k et L ne peuvent avoir que les valeurs suivantes : 36°, 45°, 60°, comptant 360° pour la circonférence.)

D'après des formules trigonométriques connues, nous obtiendrons :

$$\rho = \frac{a}{2} \cdot \frac{\cot k}{\cos \frac{I}{2}};$$

ou bien, en éliminant I, nous aurons :

$$\rho = \frac{a}{2} \cdot \frac{\cos k}{\sqrt{\sin^2 k - \cos^2 L}};$$

ce qui veut dire que le rayon de la sphère transinscrite est égal à la moitié de l'arête multipliée par le rapport de la cotangente de k au cosinus de la moitié de l'inclinaison entre les faces. Connaissant donc l'espèce et la nature du polyèdre, on peut toujours calculer aisément le rayon de la sphère qui lui est transinscrite, par suite sa surface et son volume, et, réciproquement, l'arête, la surface et le volume du polyèdre, si ce rayon est connu.

La simplicité des formules qu'on trouve comparativement à celles qui correspondent aux sphères inscrite et circonscrite donne un immense avantage à l'emploi de ces sphères sur les autres, et je ne doute pas que leur considération facilitera beaucoup l'étude des polyèdres et simplifiera bien des calculs. Outre cela, les sphères transinscrites ont beaucoup de propriétés fort curieuses :

1. *La sphère transinscrite au tétraèdre est moyenne proportionnelle entre les sphères qui lui sont inscrite et circonscrite;*

2. *La sphère transinscrite à l'octaèdre est moyenne proportionnelle entre les sphères transinscrites au cube et au tétraèdre de même arête;*

3. *Si l'on construit un parallélipipède rectangle avec les rayons des sphères transinscrites au tétraèdre, au cube et à l'octaèdre de même arête, son volume sera égal au cube dont l'arête n'est que la moitié de celle des polyèdres considérés;*

4. *La différence entre le rayon de la sphère transinscrite au dodécaèdre et à l'icosaèdre de même arête est égale à la moitié de cette arête.*

5. *Si l'on construit un triangle équilatéral avec le rayon de la sphère inscrite à l'icosaèdre et qu'on lui circonscrive un cercle, le rayon de ce cercle sera le tiers du rayon de la sphère transinscrite au dodécaèdre de même arête.*

La démonstration de ces théorèmes n'offre aucune difficulté et chaque géomètre un peu expérimenté dans l'Analyse les établira sans peine.

Je pourrais citer encore d'autres propriétés de ces curieuses sphères; mais, ce que j'en ai dit suffit déjà à en montrer l'importance et à faire saisir le rôle utile qu'elles sont appelées à jouer dans les questions de Géométrie, notamment dans le calcul des éléments des polyèdres réguliers, où, ainsi que je l'ai déjà fait voir, elles remplacent avantageusement, les sphères inscrite et circonscrite à cause de la simplicité relative de leurs formules.

J'ajouterai qu'elles jouent un grand rôle en Optique dans la réfraction double (phénomène produit par certains cristaux), ainsi que dans la polarisation de la lumière.

Je terminerai cet article en appelant l'attention du lecteur sur un fait assez curieux : — c'est que ces sphères rétablissent la symétrie des polyèdres conjugués, dérangée par les sphères inscrites et circonscrites. On sait qu'à chaque propriété descriptive ou métrique d'un polyèdre répond une propriété analogue de son conjugué. Or, parmi tous les polyèdres, il n'y avait jusqu'à présent que le cube seul qui s'exprimait rationnellement en fonction du rayon de sa sphère inscrite. Effectivement, aucun autre polyèdre régulier ne peut être exprimé en fonction rationnelle ni du rayon de sa sphère inscrite, ni de la circonscrite, pas même son conjugué, l'octaèdre ne jouissait d'aucune propriété analogue. Ce fait singulier avait déjà piqué la curiosité de bien des géomètres, qui, ne voulant pas admettre qu'il y ait injustice de la part du Créateur, surtout concernant les choses inanimées, ne pouvaient comprendre pourquoi le cube seul était favorisé en cela aux dépens de son conjugué. C'était comme un défi jeté à l'esprit humain, cette irrégularité inconcevable!...

Actuellement, cette anomalie n'existe plus, et l'octaèdre a reconquis l'avantage que le cube, son conjugué, avait sur lui, car, à son tour, il est le seul polyèdre régulier qui s'exprime rationnellement en fonction du rayon de sa sphère transinscrite; son arête est égale au double de ce rayon, tout juste comme celle du cube est égale au double du rayon de sa sphère inscrite.

On peut encore conclure de là que les sphères transinscrites font le pendant des sphères inscrites, ou, comme on dit en Géométrie, leur sont conjuguées.

Père Cyprien,
Moine du Mont-Athos,
Ci-devant Prince C. Winscmsky, explorateur.

ГЛАСНИК

НОВИНЕ ИЗ НАСТАВЕ И НАУКЕ

Нова теорија трансинскриптних сфера.[1]) — „Кад је, пре неколико месеци, *Revue générale des sciences* приредио екскузију за 350 туриста у руски манастир *Росикон (Св. Гора)*, путници се пријатно изненадише, што их тамо дочека један калуђер, који говораше потпуно француски. И ако он није био велики свештеник, ипак се у њему могао распознати одмах један врло развијен дух, човек пун идеала и научник. Али отац *Кипријан* — тако га зваху — скромно кријаше под оним монашким знацима име, које га је учинило славним међу испитиваоцима, и уздржаваше се да говори о свом знању, до кога је дошао једино из наклоности. Данас је *Revue* примио од њега врло интересантан рад из Геометрије, који овде износимо. Поменути лист донео га је у истом облику у каквоме га је писац послао, хотећи да остави у мисли руског научника сав његов карактер и метод, којим је изразио пуну научност“

* * *

Трансинскриптном (крозуписаном) сфером једног полиедра ја називам ону сферу, која додирује све његове ивице.

Зна се, да сваки правилан полиедар има једну уписану и једну описану сферу; осем тога тетраедар има још четири уписане сфере (не више, јер их нема више у његовим рогљевима). Сваки други правилан полиедар не може их толико имати, јер су њихове супротне стране паралелне; али у место тога, сваки правилан полиедар (ту спада и тетраедар) има једну трансинскриптну сферу, која *има заједнички центар са полиедром, додирује све његове ивице у средини и сече све његове стране по круговима, који су им уписани.*

Сада читалац може разумети, зашто ја овој врсти сфера дајем назив „трансинскриптне“, јер како су све уписане, оне секу полиедар и на површини се појављује толико сферних калота, колико полиедар има страна.

[1]) Ову новину послао нам је *Дим. Ј. Туцовић*, ученик VI раз. Ужичке Реалке. По препоруци својега наставника математике он је превео овај чланак из *Revue générale des sciences*. Уредништво.

Лако је показати, да постоје такве сфере. Узмимо да је P полиедар ма какве природе, f његова страна, a његова ивица а R полупречник описане сфере. Троугао, чији је врх у центру, а основица ивица, равнокрак је, јер су његове две стране полупречници, према томе, управна спуштена из центра на ивицу пада у њену средину и једнака је: квадратном корену из разлике квадрата полупречниковог и квадрата половине ивице, т. ј.

$$\sqrt{R^2-\left(\frac{a}{2}\right)^2};$$

она је дакле константна; сфера, чији ће она бити полупречник а шта више имаће свој центар у центру полиедра и према томе додириваће све ивице полиедрове у њиховој средини, биће једина овог реда т. ј. независна од природе полиедра па чак и од његове врсте, јер ове сфере више врсте, које имају једну испупчену средину, могло би се размишљати о овој средини, као што је то учињено на простим полиедрима.

Но, пошто је врста полиедра зависна од његове природе, види се, да ће полиедри сложеније врсте имати исте трансинскриптне сфере као и они, од којих се изводе по систему *Cauchy*-а.

Трансинскриптне сфере имају важних особина, али ће се оценити нарочито значај ових нових сфера примећујући, *како се полупречник трансинскриптне сфере изражава врло просто у функцији полиедрове ивице, докле се полупречници уписатих и описатих сфера изражавају у функцији ове ивице само начином компликованим.* На пр. по Cauchy-у, узимајући ивицу икосиедра за јединицу, полупречник уписане му сфере једнак је:

$$\frac{\sqrt{3(3+\sqrt{5})}}{12};$$

а полупречник описане сфере:

$$\frac{\sqrt{5+\sqrt{5}}}{2\sqrt{2}}.$$

Под истим условима полупречник трансинскриптне сфере једнак је:

$$\frac{\sqrt{5}+1}{4};$$

види се, колико је овај израз простији од претходних: он садржи само један прост корен, који се лако израчунава; исти се случај показује, кад се тиче других полиедара. Ако обележимо са J угао нагиба двеју суседних страна, а са ϱ полупречник трансинскриптне сфере, лако ћемо извести општу формулу, која ће послужити за израчунавање површине и запремине ове сфере, када је дата ивица полиедра и обрнуто, кад је познат полупречник сфере. У тој намери обележимо са K количник полукруга са бројем, колико стране полиедрове имају полигонских страна и са L количник исте количине са бројем, који исказује, колико ивица чини сваки рогаљ. (Тако да K и L могу имати само следеће вредности: 36°, 45°, 60°, рачунајући круг са 360°).

Према познатим тригонометриским формулама добићемо:

$$\varrho = \frac{a}{2} \frac{\cot K}{\cos \frac{J}{2}};$$

ако елиминишемо J, имаћемо:

$$\varrho = \frac{a}{2} \frac{\cos K}{\sqrt{\sin^2 K - \cos^2 L}},$$

то што се хоће да каже, да је полупречник трансинскриптне сфере једнак са половином ивице, умноженом са односом контангенте K и косинуса половине нагибног угла између страна. Познавајући дакле врсту и природу полиедра, може се увек лако израчунати полупречник сфере, која му је трансинскриптна, по томе њева површина и запремина, и обратно: може се одредити ивица, површина и запремина полиедра, кад је познат полупречник.

Простота формула, које се налазе, у вези с оним, које одговарају уписаним и описаним сферама, дају огромну превагу у употреби ових сфера над другима, и ја не сумњам, да ће њихово разматрање олакшавати проучавање полиедара и упростити много израчунавање. Осим тога, трансинскриптне сфере имају много врло интересантних особина. Тако:

1, Трансинскриптна сфера у тетраедру средња је пропорционала између уписаних му и описаних сфера;

2, Трансинскриптна сфера у октаедру средња је пропорционала између транс. сфере у коцки и тетраедру исте основе;

3, Ако се конструјише један правоугли паралелопипед са полупречницима трансинскриптних сфера у тетраедру, коцки и октаедру исте ивице, његова ће запремина бити једнака са запремином коцке, чија је ивица само половина ивице од посматраних полиедара;

4, Разлика између полупречника трансинскриптне сфере у додекаедру исте ивице једнака је с половином ове ивице;

5, Ако се конструјише равностран троугао са полупречником описате сфере у икосаедру, и ако му се опише круг, тада ће полупречник овог круга бити трећина полупречника трансинскриптне сфере у додекаедру са истом ивицом.

Доказ ових теорема не изискује никакве тешкоће и сваки геометар мало искусан у анализи утврдиће их без муке.

Ја бих могао навести још других занимљивијих особина ових сфера; али оно, што сам о томе казао, довољно је да покаже њихову важност, и да учини, да узму корисну улогу, коју су позвате да врше у питањима Геометрије, особито у израчунавању елемената правилних полиедара, где оне, како сам ја показао, замењују корисно уписане и описане сфере, због њихових релативно простијих формула.

Додаћу, да оне врше велику улогу у Оптици у двојном преламању (појав, произведен извесним кристалима), исто тако у поларизацији светлости.

Ја ћу завршити овај чланчић, обраћајући пажњу читалаца на један доста интересантан факат а то је: што овe сфере успостављаше симетрију спрегнутих полиедара, поремећену упис. и опис. сферама. Зна се, да свакој дескриптивној или метриској особини једног полиедра одговара аналога особина његовога спрегнутога полиедра. Но, међу свима полиедрима до сада је била само коцка, која се изражаваше рационално у функцији полупречника њене уписане сфере. Заиста, ни један други правилан полиедар не може бити изражен у рационалној функцији, ни полупречника своје уписане ни описане сфере, па и њен спрегнути полиедар, октаедар не имађаше никакву аналогу особину Овај особити факат беше већ раздражио радозналост многих геометара, који, не хотећи допустити, да ту има неправде са стране творца, нарочито кад се тиче мртвих ствари, не могаху разумети, зашто коцка једина беше удостојена у томе, на штету њеног спрегнутог полиедра. Ова необјашњива неправилност беше бачена у дух људски као некакво изазивање.

Сад ова неправилност не постоји више, и октаедар је повратио надмоћност, коју коцка, његов спрегнути полиедар, имађаше над њим, јер, што се тиче њега, он је једини правилан полиедар, који се изражава рационално у функцији полупречника трансинскриптне сфере; његова је ивица једнака двоструком полупречнику, потпуно, као што је ивица коцке једнака дрострукоm полупречнику уписане сфере.

Још се може отуда извести, да трансинскриптске сфере чине пар са уписаним сферама, или како се то геометриски каже, њима су спрегнуте.

Отац Кипријан,
калуђер свето-горски
пређе *кнез С. Вјаземски.*

ON A MATHEMATICAL TREATISE FROM MOUNT ATHOS AND ITS TRANSLATION INTO OUR LANGUAGE

Summary

The paper analyses all the details on Dimitrije Tucović's first published work. Already as a secondary school pupil (1898), Tucović translated and published a mathematical study by an Athonite monk Cyprian (published in *Revue générale des Sciences*, 9, 1898), which refers to semi-inscribed spheres into the regular polyhedra (*Nastavnik*, 10, 1898, 3—4).

»In this way« (conclude the authors), in the review *Nastavnik* of the almost twenty years ago and now, in this paper of ours, crossed each other, twice so far, for a moment roads of two unique personalities — of the Russian prince and, after that, monk Cyprian and, of the Serbian socialist Tucović, personalities who, in spite of all the profound mutual differences, had in common a certain interest in mathematics and inclination toward it, and who — in very different ways, certainly, but both of them truly and essentially — were, first of all, »thirsty for the ideals«.«